

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- ❖ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 σελίδες.
  - ❖ Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι.
  - ❖ Για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
  - ❖ Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
  - ❖ Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  - ❖ Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στη σελίδα 10.
  - ❖ Στην λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης εργασίας, δεν θα βαθμολογούνται πλήρως.

**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα με τη χρήση ταυτοτήτων:

(α)  $(x + 7)^2 =$

(β)  $(8x - 3)(8x + 3) =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α)  $15x - 15\psi =$

(β)  $x^2 - 11x + 18 =$

(γ)  $\alpha^2(x - 3) - \psi^2(x - 3) =$

(δ)  $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha - 6\beta =$

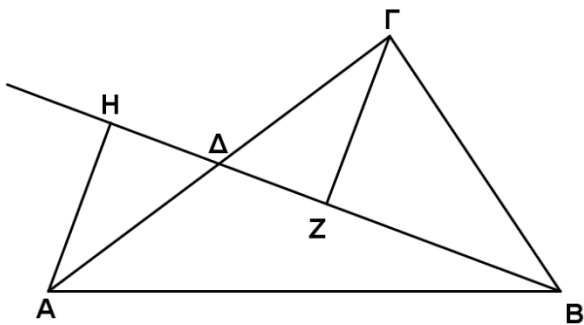
3. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\alpha^3 - 4\alpha}{\alpha^3 - 8} \div \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{2\alpha - 4} =$$

4. Δύο ενυδρεία σε ένα υδροπάρκο, έχουν την ίδια χωρητικότητα. Το ένα έχει σχήμα κύβου και το άλλο ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Αν η ακμή του πρώτου ενυδρείου είναι 4 m και οι διαστάσεις της βάσης του δεύτερου είναι 8m και 4m , να βρείτε το ύψος του ενυδρείου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου.



5. Στο πιο κάτω σχήμα η  $B\Delta$  είναι η διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αν  $\Gamma Z$  είναι το ύψος του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  και  $AH \perp HB$ , να αποδείξετε ότι  $AH = \Gamma Z$ .



6. Να σημειώσετε ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ , βάζοντας σε κύκλο τον κατάλληλο χαρακτηρισμό.

(α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ , ισχύει $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ .	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(β) Αν δύο ευθείες ταυτίζονται , τότε το σύστημα των εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις και ονομάζεται αόριστο.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(γ) Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες, είναι τετράγωνο.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(δ) Οι παράγοντες του πολωνύμου $\chi^2 - 6\chi + 9$ είναι οι $\chi + 3$ και $\chi - 3$ .	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(ε) Η αλγεβρική παράσταση $\frac{18\psi}{\psi^2-6\psi}$ ορίζεται για $\psi \neq 6$ .	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ

7. Δίνονται τα σημεία Α(2 , 5) και Β(10 , 1).

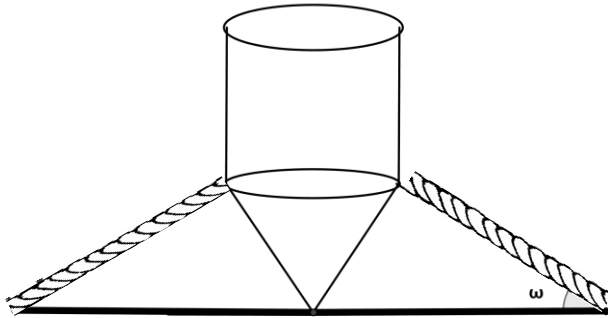
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ, του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (β. 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_1$  που περνά από το σημείο Α(2 , 5) και είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2: 2\chi + \psi = 8$ . (β. 3)

8. Να λύσετε την εξίσωση :

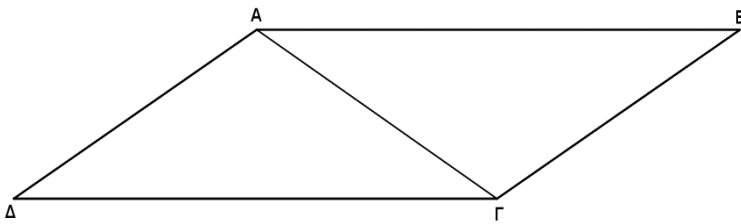
$$\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2 + 2\chi - 3} - \frac{\chi - 1}{1 - \chi} = \frac{\chi + 2}{\chi + 3}$$

9. Η κλειστή μεταλλική κατασκευή του πιο κάτω σχήματος, χρησιμοποιείται ως αποθηκευτικός χώρος για το γάλα. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο με ύψος 6m και έναν κώνο με ακτίνα 3m και γενέτειρα 5m . Για σκοπούς ασφάλειας , η κατασκευή στερεώθηκε και από τις δύο πλευρές με σχοινί μήκους 10m. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\omega$  που σχηματίζει το σχοινί με το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου)



10. Στο πιο κάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο με  $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$  ,  $A\Gamma = B\Gamma$  ,  $\Gamma Z \perp AB$  και  $N$  το μέσο της  $A\Gamma$ . Να προεκτείνετε την πλευρά  $\Delta\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma H = \Delta\Gamma$ .  
Να αποδείξετε ότι :

- (α) Το τετράπλευρο  $AB\eta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (β. 2)  
(β) Το τρίγωνο  $Z\eta\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (β. 3)



**ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. (α) Αν ισχύει η σχέση  $(2\alpha + 1)^3 - 3(2\alpha + 3)(2\alpha - 3) = \beta + 6 + 8\alpha^3$ ,  
να αποδείξετε ότι  $6\alpha - \beta = -22$ . (β. 3,5)
- (β) Αν  $\alpha - \chi = 10$  και  $\alpha^2 - \beta\chi - \alpha(\chi - \beta) = 80$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta = 8$ . (β. 3,5)
- (γ) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $6\alpha - \beta = -22$  και  $\alpha + \beta = 8$ , να υπολογίσετε  
τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ . (β. 3)

2. Δίνεται το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με κορυφές  $A(2,3)$  ,  $B(3,6)$  ,  $\Gamma(6,5)$  και  $\Delta(5,2)$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- (β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.

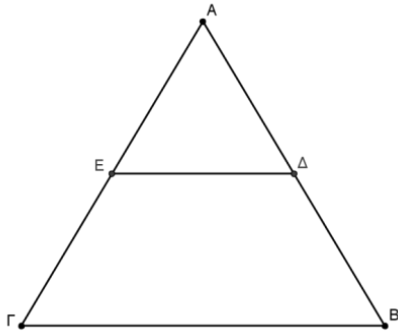
3. (α) Να λύσετε το πιο κάτω πρόβλημα με εξίσωση.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κατά  $10m^2$  μικρότερο από το διπλάσιο του εμβαδού ενός τετραγώνου πλευράς  $\chi$ . Αν γνωρίζετε ότι το μήκος του ορθογωνίου είναι κατά  $5m$  μεγαλύτερο από την πλευρά του τετραγώνου και το πλάτος του κατά  $2m$  μικρότερο από την πλευρά του τετραγώνου, να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(β) Αν  $3\alpha + \beta = 5$  και  $\alpha \cdot \beta = 3$ , να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι σταθερή.

$$\left(\frac{2\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$$

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $AB = A\Gamma$ ). Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.
- (α) Αν  $\Delta E = \left(5\chi - \frac{1}{\chi}\right) \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ , να βρείτε τις τιμές του  $\chi$ .
- (β) Να προεκτείνετε τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  κατά τμήματα  $BZ$  και  $\Gamma N$ , έτσι ώστε  $BZ = \Gamma N$ .  
Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων  $Z$  και  $N$  από την πλευρά  $B\Gamma$  είναι ίσες.



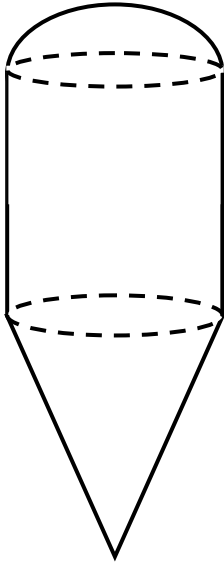


5. Ο κύριος Γιάννης είναι κτηνοτρόφος και αποφάσισε να φτιάξει μια κατασκευή για την αποθήκευση των σιτηρών. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο που έχει ένα ημισφαίριο στη μία βάση και έναν κώνο στην άλλη βάση (όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα). Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι  $15\pi \text{ m}^2$ , η γενέτειρα του είναι ίση με  $5\text{m}$  και το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με  $6\text{m}$ . Ο κύριος Γιάννης για να φτιάξει την πιο κάτω κατασκευή θα χρησιμοποιήσει φύλλα λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου, διαστάσεων  $2\text{m}$  και  $3\text{m}$ . Κάθε φύλλο λαμαρίνας στοιχίζει €8.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυλίνδρου είναι  $3\text{m}$ . (β.2)

(β) Να υπολογίσετε: i. Πόσα φύλλα λαμαρίνας θα χρειαστεί. (β.7)

ii. Πόσα θα στοιχίσει η κατασκευή. (β.1)



### Πίνακας Τριγωνομετρικών Αριθμών

Γωνία	ημ	συν	εφ	Γωνία	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,036
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,072
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,111
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,150
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,192
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,280
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,376
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,428
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,483
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,540
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,600
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,664
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,732
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,881
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,963
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,050
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,145
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,356
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,475
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,605
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,747
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,904
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,078
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,271
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,487
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2586	3,732
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,011
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,332
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,705
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,145
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,671
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,314
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,115
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,514
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,43
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,30
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,08
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,64
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0	