

# ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 1

## Γ' ΤΑΞΗ

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- ❖ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.
  - ❖ Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι.
  - ❖ Για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
  - ❖ Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
  - ❖ Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  - ❖ Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στη σελίδα 10.
  - ❖ Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης εργασίας, δεν θα βαθμολογούνται πλήρως.

**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα με τη χρήση ταυτοτήτων:

(α)  $(5\chi + 2\psi)^2 =$

(β)  $(\chi - \psi^2)(\chi + \psi^2) =$

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$2\chi + 3\psi = -1$$

$$\chi + \psi = -2$$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\chi^2 + 5\chi - 3 = 0$$

4. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α)  $6\alpha - 18\beta =$  (β.1)

(β)  $\chi^2 - 100 =$  (β.1)

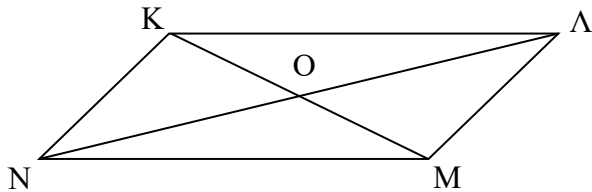
(γ)  $\alpha^2 + 5\alpha + 6 =$  (β.1)

(δ)  $\alpha^2\chi - \alpha^2\psi + \beta^2\psi - \beta^2\chi =$  (β.2)

5. Δίνεται τετράπλευρο ΚΛΜΝ με  $NO = OL$  και  $\widehat{K\Lambda N} = \widehat{\Lambda\tilde{N}M}$ . Να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΚΛΟ και ΜΝΟ είναι ίσα.

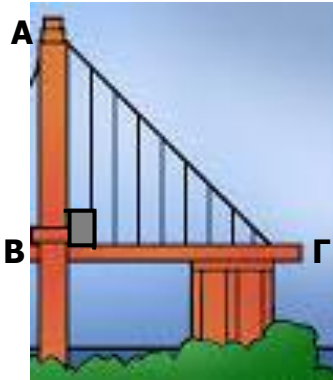
(β) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.



6. Δίνεται κύλινδρος με όγκο  $200\pi \text{ cm}^3$  και κύβος με εμβαδόν ολικής επιφάνειας  $384 \text{ cm}^2$ . Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με την ακμή της βάσης του κύβου, να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

(Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του  $\pi$ ).

7. Για να στηριχτεί η δοκός (AB) μιας γέφυρας, τοποθετήθηκε στήριγμα σε απόσταση (BΓ) από τη βάση της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ισχύει  $\text{syn}\hat{\Gamma} = \frac{5}{13}$ :
- (α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\eta\mu\hat{\Gamma}$  και  $\epsilon\phi\hat{A}$ . (β. 4)
- (β) Να βρείτε κατά προσέγγιση ακεραίου το μέτρο της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ . (β. 1)



8. Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1: \psi = (\omega^2 - 2\omega)\chi + 4$  και  $\epsilon_2: 3\omega\chi + 2\psi = 8$ .  
 Αν οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $\omega$ .

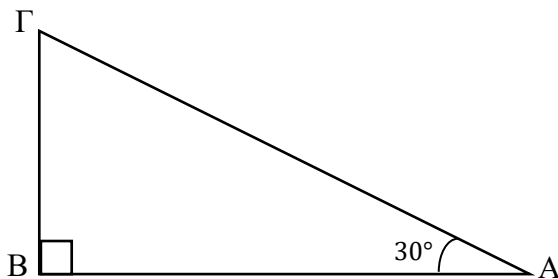
9. (α) Δίνεται το πολυώνυμο  $f(x) = x^3$ .  
Να αποδείξετε ότι  $f(x + 2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ .
- (β) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με διαγωνίους  $A\Gamma = f(x + 2) - f(x)$  και  $B\Delta = 6x(x + 2) + 8$ , είναι ορθογώνιο.

10. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) δίνεται  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $A\Gamma = 12\text{cm}$  και  $B\Delta$  η διάμεσος του τριγώνου. Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα:

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο.

(β) Να βρείτε το μήκος του  $EZ$ .

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



**ΜΕΡΟΣ Β΄ :** Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

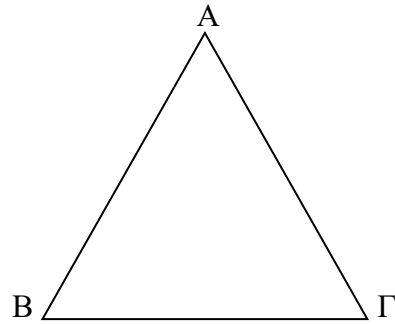
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\chi-7}{\chi^2-5\chi+4} - \frac{1}{4-\chi} = \frac{\chi-3}{\chi^2-\chi}$  (β. 6)

(β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: (β. 4)

$$\left(\frac{\chi}{\psi} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{\chi^2}{\chi^2 - \psi^2}\right) \div \left(1 - \frac{\chi}{\chi + \psi}\right) \text{ είναι σταθερή.}$$

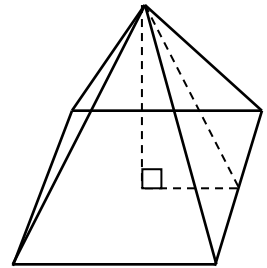
2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των  $A\Gamma$  και  $\Gamma B$  παίρνω αντίστοιχα τμήματα  $\Gamma\Delta=BE$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα .
- (β) Αν  $\Delta Z$  και  $E\text{H}$  είναι οι αποστάσεις των σημείων  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $E\text{H} = \Delta Z$ .



3. (α) Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν άθροισμα 3 και διαφορά 5, όπου  $\alpha > \beta$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$K = \alpha^3 - \beta^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$$

- (β) Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης  $(\chi + 3\psi)$ cm και ύψος  $\left(\frac{3\chi - \psi}{2}\right)$ cm.  
Αν ισχύει  $\chi^2 + \psi^2 = 40$ , να αποδείξετε ότι το απόστημα της πυραμίδας είναι ίσο με 10cm.



4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(-4, 1)$ ,  $B(-6, 5)$ ,  $\Gamma(-2, 7)$  και μήκος πλευράς  $(A\Gamma) = \sqrt{40}$  μονάδες.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $A\Gamma$ . (β. 2)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διαμέσου  $BM$  είναι  $\chi + 3\psi = 9$ . (β. 2,5)

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (β. 2,5)

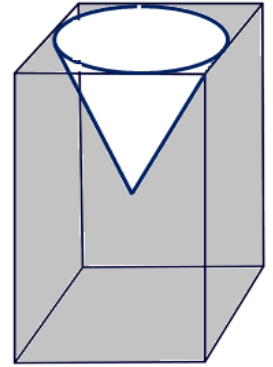
(δ) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma \perp BM$ . (β. 1,5)

(ε) Να βρείτε το συν  $\hat{\Gamma}$ . (β. 1,5)



5. Ένα εργοστάσιο θέλει να κατασκευάσει 100 ίδιες πήλινες γλάστρες. Η κάθε γλάστρα αποτελείται από ένα τετραγωνικό πρίσμα από το οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος είναι  $144\text{cm}^2$ , ο όγκος του κώνου είναι  $96\pi\text{ cm}^3$  και το άθροισμα των υψών των δύο στερεών είναι  $20\text{cm}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κώνου είναι  $6\text{cm}$ . (β. 1,5)



(β) Η κάθε γλάστρα πρέπει να μπογιατιστεί (βαφτεί) ολόκληρη με ειδικό υλικό, το οποίο πωλείται σε συσκευασία αξίας €15 η κάθε μια. Κάθε συσκευασία καλύπτει επιφάνεια  $3000\text{cm}^2$ . Να βρείτε το συνολικό κόστος μπογιατίσματος των 100 γλαστρών. (β. 8,5)

## Πίνακας Τριγωνομετρικών Αριθμών

Γωνία	ημ	συν	εφ	Γωνία	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,036
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,072
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,111
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,150
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,192
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,280
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,376
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,428
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,483
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,540
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,600
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,664
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,732
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,881
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,963
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,050
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,145
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,356
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,475
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,605
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,747
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,904
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,078
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,271
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,487
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2586	3,732
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,011
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,332
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,705
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,145
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,671
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,314
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,115
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,514
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,43
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,30
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,08
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,64
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0	