

ΕΠΙΧΡΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i)	$(\chi - 3)^2$	ii)	$(2\chi + \omega)^2$
iii)	$(5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi)$	iv)	$(2\psi - 5)^3$
v)	$(\alpha + \frac{1}{\alpha})^3 =$	vi)	$(6 + \sqrt{2})^2 =$

2. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $(2\chi + 8)(2\chi - 8) - (3\chi - 1)^2 = 6 - (2\chi + 1)^2 - \chi^2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση – Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α)	$4\chi + 4\psi + 8\omega$	β)	$3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi$	γ)	$9\chi^2 - 16\psi^2$	δ)	$\chi^2 - \chi - 30$
ε)	$25\chi^2 + 40\chi + 16$	στ)	$\psi^3 - 25\psi$	η)	$-\psi^2 + 8\psi - 15$		

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

1)	$\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$	2)	$\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$	3)	$16\chi^4 - 81\psi^4$
4)	$\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) + (\alpha^2 - 25)$				

3. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

1)	$\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$	2)	$\frac{5\alpha - 5\psi + \alpha\chi - \psi\chi}{\alpha^2 - \alpha\psi}$
----	----------------------------------	----	-------------------------------------------------------------------------

4. Να κάνετε τις πράξεις: α) $\frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6}$ β) $\frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right)$

γ) $\frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 2x = 15$

β) $3\alpha^2 + 4\alpha - 7 = 0$

γ) $7x^2 - 5x = -3$

δ) $(x + 5)(x^2 - 2x - 3)(2x - 5) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$ β) $\frac{7y}{y^2-y-12} - \frac{y-2}{4-y} = \frac{3}{y+3}$

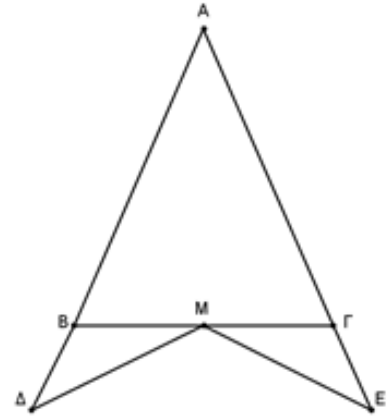
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία Ι – Ίσα Τρίγωνα

1. Στο σχήμα δίπλα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=AG)

και το σημείο Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Αν ΒΔ και ΓΕ προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ

αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ=ΓΕ να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.



2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ).Αν Μ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι : α) ΒΛ=ΓΜ

β) Τα Μ και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά ΒΓ.

3. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ)

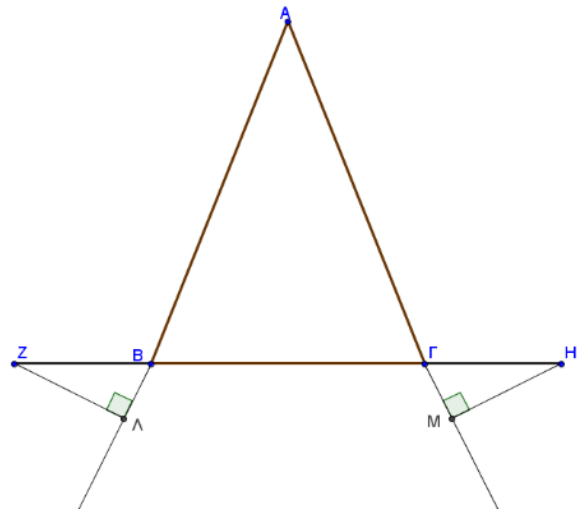
προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά τμήματα

BZ = ΓΗ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν ΖΛ και ΗΜ οι αποστάσεις των Ζ και Η από τις

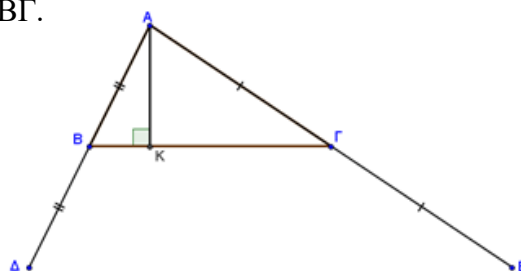
πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

ZΛ = ΗΜ.



5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ). Αν Κ,Λ,Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΛΚ=ΛΜ.

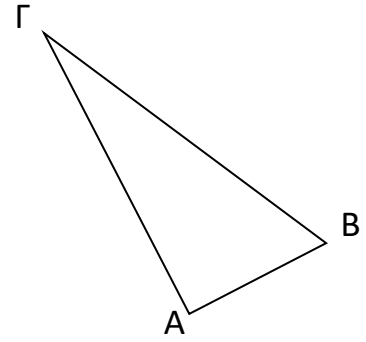
6. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΑΚ. Αν ΑΒ = ΒΔ και ΑΓ = ΓΕ να αποδείξετε ότι Δ και Ε απέχουν ίση απόσταση από την ευθεία ΒΓ.



ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Τριγωνομετρία

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 5$ cm και $B\Gamma = 13$ cm.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma$ και $\epsilon\phi B$.



2. Να χαρακτηρίσετε (κυκλώνοντας) με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες.

(i) $\sigma\upsilon\nu 38^\circ = \eta\mu 52^\circ$

ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

(ii) $\epsilon\phi 45^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 60^\circ$

ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

(iii) Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$ και $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ τότε $\epsilon\phi\theta = \frac{12}{5}$

ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

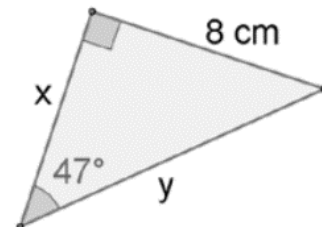
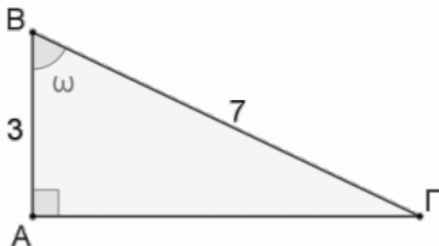
(iv) $\frac{\eta\mu 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ} = 1$

ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Στα πιο κάτω τρίγωνα να υπολογίσετε:

(α) τη γωνία ω κατά προσέγγιση ακεραίου

(β) τους άγνωστους x και y κατά προσέγγιση δεκάτου

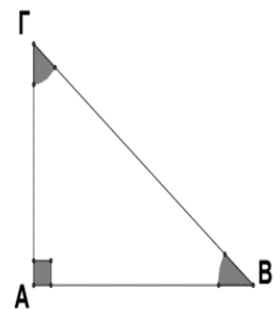


4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται $\epsilon\phi\Gamma = \frac{6}{8}$.

(α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\Gamma$, $\epsilon\phi B$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

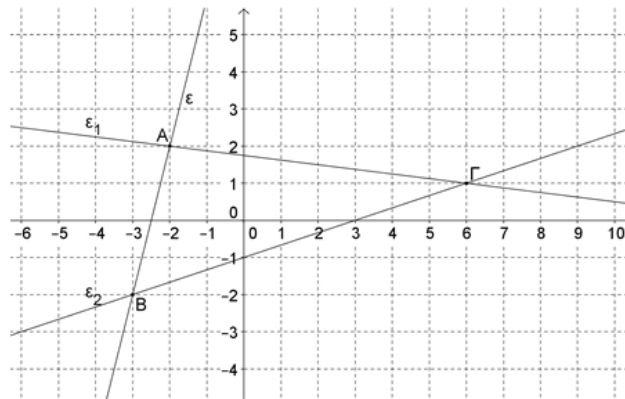
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{20\eta\mu\Gamma - 12\epsilon\phi B}{5\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 5 : Ευθεία – Γραμμικά Συστήματα

1. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία A, B και Γ που είναι κορυφές του τριγώνου ABΓ. Να υπολογίσετε: α) Το μήκος της πλευράς AB του τριγώνου ABΓ, β) Τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου, δ) τη γραφική λύση του συστήματος των ευθειών $\chi = 9$ και της ε_2 .



2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-4, 3)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία $3\chi - 6\psi = 8$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που :
- διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$ και έχει κλίση $\lambda = 4$.
 - διέρχεται από τα σημεία $(6, -1)$ και $(3, 2)$.
 - διέρχεται από τα σημεία $(-5, 3)$ και $(2, 3)$.
 - διέρχεται από τα σημεία $(2, 4)$ και $(2, -6)$.
4. Να υπολογίσετε την τιμή του a ώστε οι ευθείες $y = 2\chi - 5$ και $y = (2a - 7)\chi + 9$ να είναι παράλληλες.
5. Να βρείτε την κλίση των ευθειών που έχουν εξίσωση:
- $\psi = -7\chi + 4$
 - $\chi = 4$
 - $\psi = -3$
 - $2\psi - 6 = 4\chi$
6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-1, 3)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1: 2\psi - 4\chi = 1$.
7. Να λύσετε τα συστήματα:

$$3\chi - \psi = 12$$

$$\frac{2\chi}{5} - \frac{\psi}{3} = \frac{8}{3}$$

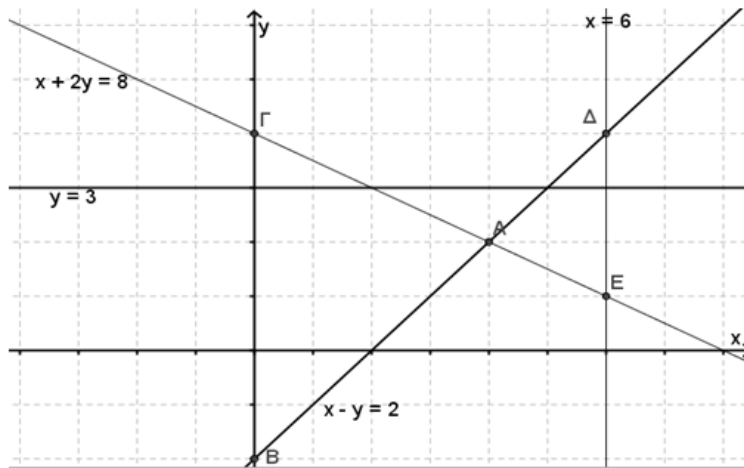
$$1 - \frac{\chi}{2} = \frac{\chi - 2\psi}{3}$$

$$2\chi + 3\psi = 19$$

$$\chi = 2(\psi + 1)$$

$$\chi - \frac{2\chi - \psi}{4} = \frac{\psi}{2}$$

8. Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :

- | | | | |
|------|--------------|-----|--------------|
| i) | $x + 2y = 8$ | ii) | $y = 3$ |
| | $x - y = 2$ | | $x - y = 2$ |
| iii) | $x = 6$ | iv) | $y = 0$ |
| | $x + 2y = 8$ | | $x + 2y = 8$ |
| v) | $x = 0$ | | |
| | $x - y = 2$ | | |

9. Να λύσετε τα προβλήματα με τη χρήση συστημάτων:

- A) Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά ,τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.
Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.
- B) Σε ένα διαγωνισμό γνώσεων μια ομάδα μαθητών απάντησε συνολικά σε 50 ερωτήσεις και κέρδισε €166.
Αν για κάθε ορθή απάντηση κέρδιζε €5 και για κάθε λανθασμένη έχανε €2, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε ορθά και σε πόσες λάθος.
- Γ) Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ.
Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ.
Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

10. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: \psi = (3\alpha - 2)\chi + 5$ και $\varepsilon_2: 4\chi - 2\psi = 1$
Αν οι ευθείες είναι κάθετες , να υπολογίσετε την τιμή του α .

11. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(1,4) , B(2,1) και Γ(-2,3).

- Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB , BΓ , AΓ.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι και ισοσκελές.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της πλευράς BΓ.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Δ(4,5) και είναι παράλληλη με την πλευρά AB.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-3,2), Β(-2,6) και Γ(5,0).

α) Να βρείτε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

β) Να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το Γ και είναι παράλληλη με την ΑΒ.

δ) Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε η ευθεία $\psi=(2\kappa-3)\chi+\kappa+3$ να περνά από το σημείο Β.

13. α) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε το σύστημα εξισώσεων να μην έχει λύση:

$$y = (2\alpha + 3)x + 6$$

$$7x - y = 5$$

β) Σε ένα εκπαιδευτικό τηλεπαιχνίδι μια ομάδα μαθητών απάντησε σε 20 ερωτήσεις και πήρε €80.

Αν για κάθε σωστή απάντηση κέρδιζε €7 και για κάθε λανθασμένη απάντηση έχανε €5,

να βρείτε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λανθασμένα.

14. Να βρείτε τη σχετική θέση των πιο κάτω ευθειών

$\epsilon_1: \psi = 5\chi - 1$ και $\epsilon_2: 10\chi - 2\psi = 2$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στερεομετρία

1. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $42m^3$ και οι δύο από τις τρεις διαστάσεις του είναι 2m και 3m. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

2. Η ολική επιφάνεια κύβου είναι $216 cm^2$. Να βρείτε τον όγκο και τη διαγώνιο του.

3. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης ίσο με $144cm^2$ και όγκο ίσο με $384cm^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

4. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάσεις ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm αντίστοιχα. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 25cm να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.

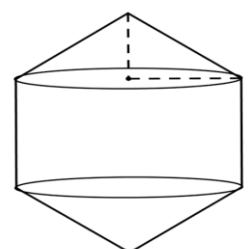
5. Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 20m και ακτίνα βάσης 30m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει $0,5 \text{ €}/m^2$ για τις βάσεις και $0,3 \text{ €}/m^2$ για την κυρτή επιφάνεια. Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

6. Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο και δύο ίδιους κώνους ενωμένους στις βάσεις τους. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $640\pi m^3$ και το ύψος του είναι 10m.

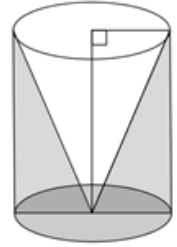
Αν η γενέτειρα του κώνου ισούται με το ύψος του κυλίνδρου να βρείτε:

α) τον όγκο του στερεού

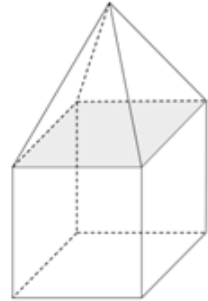
β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού.



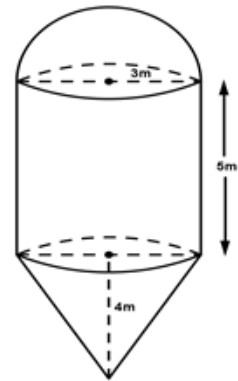
7. Στο σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος που από μέσα του αφαιρέθηκε ένας κώνος. Ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Αν η γενέτειρα του κώνου ισούται με 13 cm και η ακτίνα του με 5 cm , να υπολογίσετε:
- τον όγκο του στερεού που μένει,
 - το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται.
- (Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π).



8. Η διπλανή κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο που έχει ακμή ίση με 6 m και μία τετραγωνική πυραμίδα που έχει όγκο ίσο με 48 m^3 .
Να υπολογίσετε: (α) τον όγκο της κατασκευής και
(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς της.



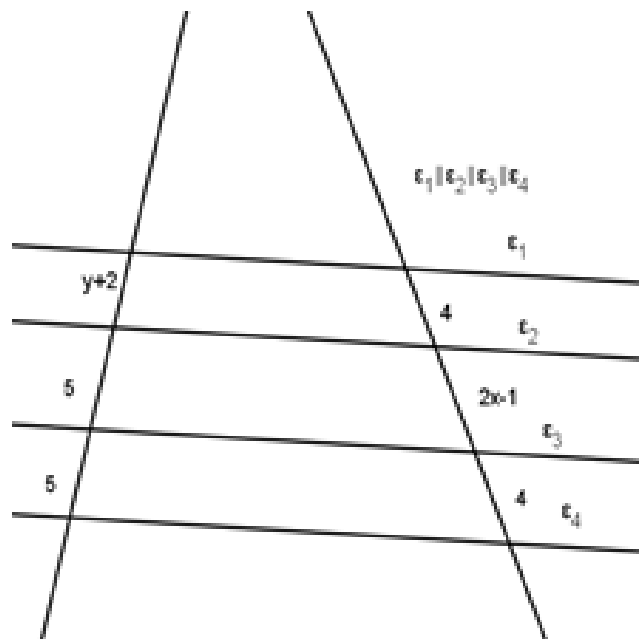
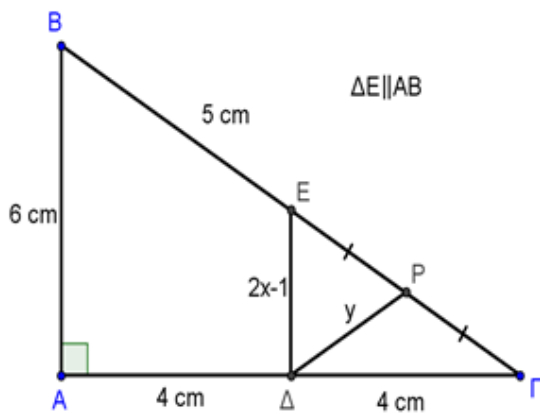
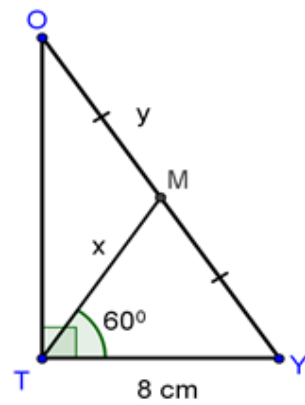
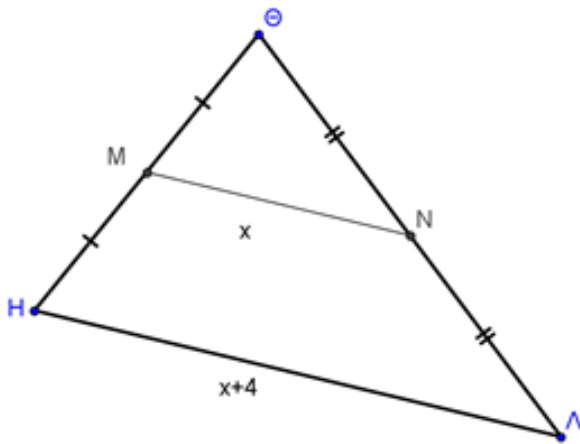
9. Η διπλανή κατασκευή έχει για οροφή ημισφαίριο ακτίνας 3 m και στο κάτω μέρος του κυλίνδρου έχει προσκολληθεί κώνος ύψους 4 m .
(α) Να βρείτε τον όγκο της κατασκευής.
(β) Η κατασκευή θα βαφτεί σε όλη της την επιφάνεια με ειδική μεταλλική μπογιά. Αν το βάψιμο κάθε τετραγωνικού μέτρου θα στοιχίσει $\text{€}3$, να βρείτε το συνολικό κόστος. ($\pi \cong 3,14$)



ΕΝΟΤΗΤΑ 9: Γεωμετρία II: Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια

- Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνετε τη $ΔΓ$ προς το μέρος του $Γ$ κατά τμήμα $ΔΓ=ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒΕΓ$ παραλληλόγραμμο.
- Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, $Μ$ είναι το μέσο της $ΑΔ$. Φέρουμε την $ΒΜ$ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΒΜ=ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά τμήμα $ΑΔ=ΑΒ$ και την $ΑΓ$ κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι το $ΒΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο.
- Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^\circ$). Αν τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΔΕΖ$ ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογώνιου είναι κορυφές ρόμβου.
- Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^\circ$) και το ύψος του $ΑΔ$. Αν $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ να αποδείξετε ότι $ΑΕΔΖ$ ορθογώνιο.
Αν επιπλέον $Μ$ είναι το μέσο της $ΕΖ$ να αποδείξετε ότι $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{4}$.

7. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y



8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και E το μέσο της BA ,

να προεκτείνετε την AE κατά τμήμα $EZ = AE$.

Να αποδείξετε ότι: (α) Το $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο
(β) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος

